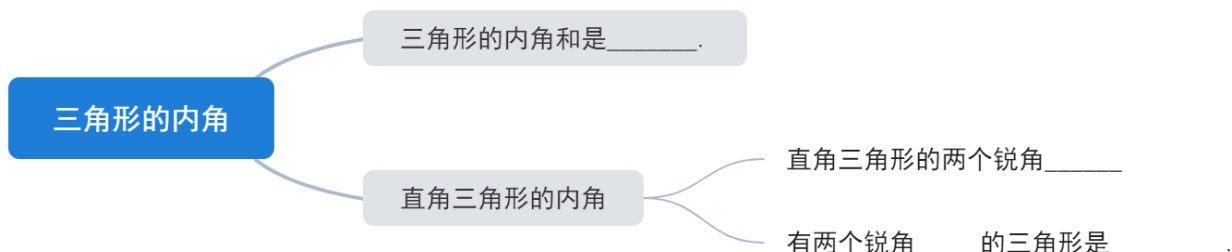


第2讲三角形的角

一、三角形的内角



- 【备注】** 1. 三角形内角和定理：三角形的内角和是 180° 。
2. 直角三角形的内角：① 直角三角形的两个锐角互余。
② 有两个锐角互余的三角形是直角三角形。

举个 “ ” 栗子 “子”

栗子1

1. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 1 : 2$ ，那么 $\triangle ABC$ 的形状是（ ）。
- A. 锐角三角形 B. 等腰三角形 C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

【备注】 见比设 k ，利用三角形内角和 180° 列方程解题

【答案】 D

【解析】 $\because \angle A : \angle B : \angle C = 1 : 1 : 2$ ，

$\therefore$ 设 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度数分别为 x° 、 x° 、 $2x^\circ$ ，

根据三角形内角和定理可得 $x + x + 2x = 180$ ，解得 $x = 45$ ，

$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

故选：D。

【标注】 【知识点】等腰直角三角形的判定

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A - \angle B = 20^\circ$ ， $\angle B - \angle C = 35^\circ$ ，则 $\triangle ABC$ 是 _____ 三角形。

【备注】把 $\angle A, \angle C$ 都转换成与 $\angle B$ 的关系，再列方程解题

【答案】锐角

【解析】 $\because \angle A - \angle B = 20^\circ$,
 $\therefore \angle A = \angle B + 20^\circ$.
 $\because \angle B - \angle C = 35^\circ$,
 $\therefore \angle C = \angle B - 35^\circ$.
 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,
 $\therefore \angle B + 20^\circ + \angle B + \angle B - 35^\circ = 180^\circ$.
 $3\angle B = 195^\circ$,
 $\angle B = 65^\circ$,
 $\therefore \angle A = \angle B + 20^\circ = 85^\circ$,
 $\angle C = \angle B - 35^\circ = 65^\circ - 35^\circ = 30^\circ$,
 $\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形 .

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

3. 下列条件中，能判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形的是（ ） .

A. $\angle A = 2\angle B = 3\angle C$

B. $\angle A + \angle B = 2\angle C$

C. $\angle A = \angle B = 30^\circ$

D. $\angle A = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{3}\angle C$

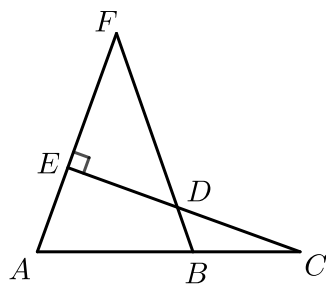
【备注】考察直角三角形的判定（与角相关），重点推导出 90°

【答案】 D

【解析】 A 选项： $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，而 $\angle A = 2\angle B = 3\angle C$ ，则 $\angle A = \frac{1080^\circ}{11}$ ，所以错误；
B 选项： $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle A + \angle B = 2\angle C$ ，则 $\angle C = 60^\circ$ ，不能确定 $\angle B$ ， $\angle A$ 的度数，所以错误；
C 选项： $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle A = \angle B = 30^\circ$ ，则 $\angle C = 120^\circ$ ，所以错误；
D 选项： $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle A = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{3}\angle C$ ，则 $\angle C = 90^\circ$ ，选项正确 .
故选 D .

【标注】【知识点】直角三角形的判定

4. 如图， C 在 AB 延长线上， $CE \perp AF$ 于点 E ，交 BF 于点 D ， $\angle F = 60^\circ$ ， $\angle C = 20^\circ$ ，则 $\angle FBA =$ () .



- A. 50° B. 60° C. 70° D. 80°

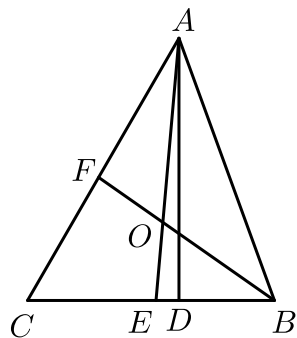
【备注】 利用垂线的性质推导互余，再利用三角形的内角和倒角计算

【答案】 A

【解析】 $\because CE \perp AF$,
 $\therefore \angle FED = 90^\circ$,
 $\because \angle F = 60^\circ$,
 $\therefore \angle FDE = 30^\circ$,
 $\therefore \angle BDC = 30^\circ$,
 $\because \angle C = 20^\circ$,
 $\therefore \angle ABF = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ$.
 故选：A .

【标注】 【知识点】 三角形内角和的应用

5. 如图， $\triangle ABC$ 中， AD 是高， AE 、 BF 是角平分线，它们相交于点 O ， $\angle CAB = 50^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，求 $\angle DAE$ 和 $\angle BOA$ 的度数 .



【备注】 复杂倒角，一层层推导，入手点是 $\triangle ABC$ 的三个角，再结合高线、角平分线的定义解题

【答案】 $\angle DAE = 5^\circ$ ， $\angle BOA = 120^\circ$.

【解析】 $\because \angle CAB = 50^\circ, \angle C = 60^\circ,$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ,$$

又 $\because AD$ 是高,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 180^\circ - 90^\circ - \angle C = 30^\circ,$$

$\because AE, BF$ 是角平分线,

$$\therefore \angle CBF = \angle ABF = 35^\circ, \angle EAF = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DAC - \angle EAF = 5^\circ,$$

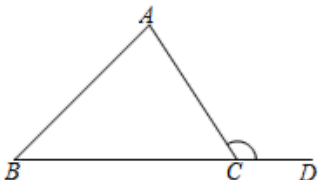
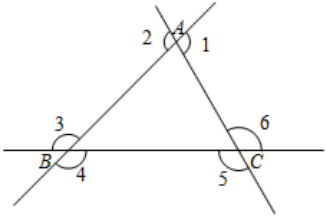
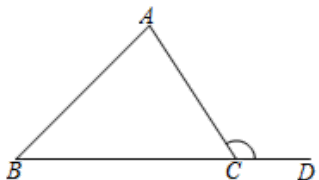
$$\angle AFB = \angle C + \angle CBF = 60^\circ + 35^\circ = 95^\circ,$$

$$\therefore \angle BOA = \angle EAF + \angle AFB = 25^\circ + 95^\circ = 120^\circ,$$

故 $\angle DAE = 5^\circ, \angle BOA = 120^\circ$.

【标注】【知识点】三角形-内角角平分线

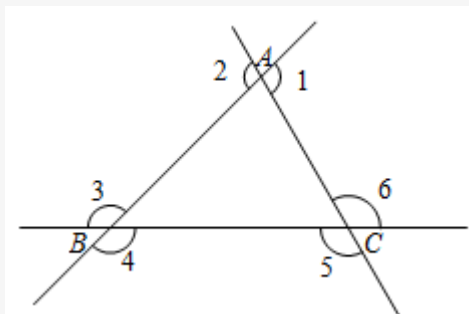
二、三角形的外角

基本图形	与外角相关知识点
	定义：三角形的 <u>一边</u> 与 <u>另一边的延长线</u> 组成的角，叫做三角形的外角。
	三角形共有 <u>六个</u> 外角，每个顶点处的两个外角是相等的。 三角形的外角和等于 <u>360°</u> 如图： <u>$\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 = 360^\circ$</u> 。
	【重要推论】 ①三角形的外角等于 <u>与它不相邻的两个内角的和</u> 。 如图： <u>$\angle ACD = \angle A + \angle B$</u> ②三角形的一个外角 <u>大于</u> 任何一个与它不相邻的内角。 如图： <u>$\angle ACD > \angle A, \angle ACD > \angle B$</u> 。

【备注】【注意】

三角形的外角和等于 360° .

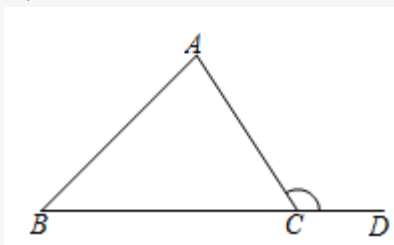
每个顶点处取一个外角, 再将三个外角相加, 叫三角形的外角和(并非6个外角之和) .



如图: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$.

重要推论:

①三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和 .



如图: $\angle ACD = \angle A + \angle B$

【推导过程】

在 $\triangle ABC$ 中,

$$\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ .$$

$$\text{又} \because \angle ACB + \angle ACD = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B .$$

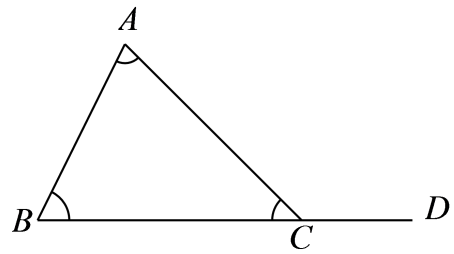
②三角形的一个外角大于任何一个与它不相邻的内角 .

如图: $\angle ACD > \angle A$, $\angle ACD > \angle B$.

 举个 “” 栗子

 栗子3

6. 如图, 点D是 $\triangle ABC$ 的BC边的延长线上一点 $\angle A = 81^\circ$, $\angle B = 59^\circ$, 则 $\angle ACD$ 的大小等于 ____ $^\circ$.



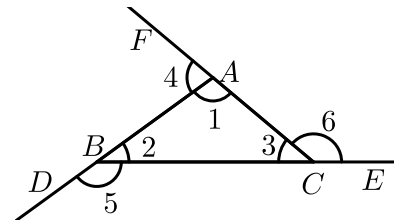
【备注】外角概念的考察，学生必会知识点

【答案】140

【解析】 $\because D$ 是 $\triangle ABC$ 边 BC 延长线上的点，
 $\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B = 81^\circ + 59^\circ = 140^\circ$.

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

7. 如图， $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ，那么 $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6$ 的度数是（ ） .



A. 540°

B. 360°

C. 180°

D. 不能确定

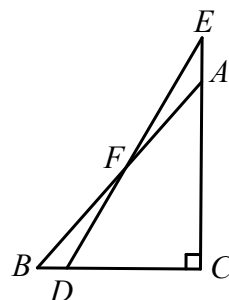
【备注】外角和概念的考察，学生必会知识点

【答案】B

【解析】 $\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$,
 $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$,
 $\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$,
 $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$,
 $\therefore \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$
 $= 180^\circ - \angle 1 + 180^\circ - \angle 2 + 180^\circ - \angle 3$
 $= 360^\circ$.
 故选B .

【标注】【知识点】三角形的外角定义及性质

8. 如图，一副分别含有 30° 和 45° 角的两个直角三角板，拼成如下图形，其中 $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle E = 30^\circ$ ，则 $\angle BFD$ 的度数是（ ）。



- A. 15° B. 25° C. 30° D. 10°

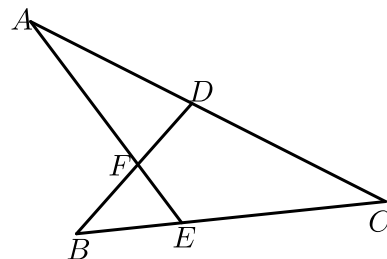
【备注】借助三角板的特殊角度代入计算， $\angle BFD$ 可直接利用外角去算

【答案】A

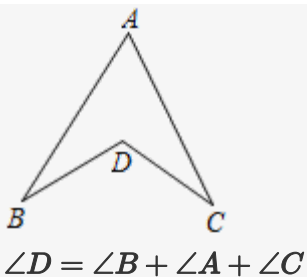
【解析】 $\because \text{Rt}\triangle CDE$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle E = 30^\circ$ ，
 $\therefore \angle BDF = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ ， $\angle B = \angle BAC = 45^\circ$ ，
 在 $\triangle BFD$ 中，
 $\angle BFD = 180^\circ - \angle B - \angle BDF$
 $= 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ$
 $= 15^\circ$ ，
 故答案选A。

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

9. 如图所示，若 $\angle A = 32^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 38^\circ$ ，则 $\angle DFE$ 等于_____。



【备注】需要倒两次外角，可以结合学生程度，给出用飞镖模型解题的思路

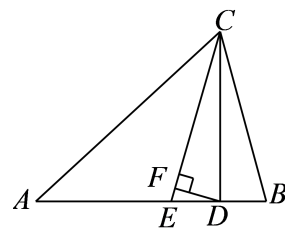


【答案】 115°

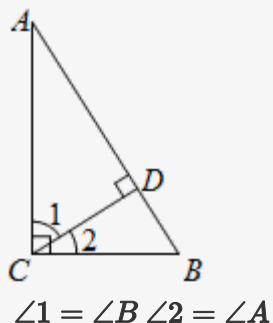
【解析】 $\because \angle AEB$ 是 $\triangle AEC$ 的外角，
 $\therefore \angle AEB = \angle A + \angle C = 70^\circ$.
 $\because \angle DFE$ 是 $\triangle BEF$ 的外角，
 $\therefore \angle DFE = \angle AEB + \angle B = 115^\circ$.

【标注】 【知识点】 三角形内角和的应用

10. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 72^\circ$ ，若 CE 平分 $\angle ACB$ ， $CD \perp AB$ 于 D ， $DF \perp CE$ ，则 $\angle CDF =$ _____ 度 .



【备注】 先利用内角和推导出 $\angle ACE$ 的度数，再结合外角推导出 $\angle CED$ 的度数，关键点利用互余推导 $\angle CFD$ 与 $\angle CED$ 的等量关系
 可以结合学生程度，给出双垂直模型的思路



【答案】 69

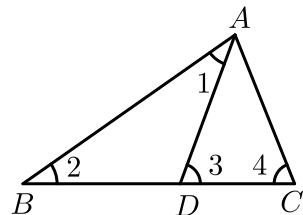
【解析】 $\because \angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 72^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACB = 78^\circ$ ，

$$\begin{aligned}
&\because CE \text{ 平分 } \angle ACB, \\
&\therefore \angle BCE = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times 78^\circ = 39^\circ, \\
&\because CD \perp AB, \\
&\therefore \angle CDB = 90^\circ, \\
&\because \angle B = 72^\circ, \\
&\therefore \angle BCD = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ, \\
&\therefore \angle FCD = \angle BCE - \angle BCD = 21^\circ, \\
&\because DF \perp CE, \\
&\therefore \angle CFD = 90^\circ, \\
&\therefore \angle CDF = 90^\circ - \angle FCD = 69^\circ, \\
&\text{即 } \angle CDF = 69^\circ.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】模型综合运用

栗子5

11. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BC 上一点， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ， $\angle BAC = 72^\circ$ ，求 $\angle DAC$ 的度数。

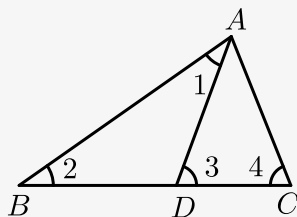


【备注】先利用外角推导出 $\angle 3$ 与 $\angle 2$ 的关系，再利用内角和进行计算

【答案】 36° 。

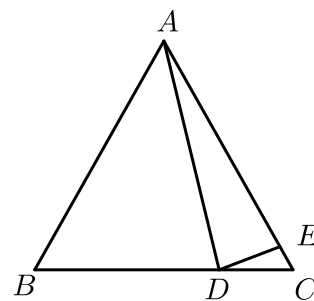
【解析】设 $\angle 1 = \angle 2 = x$ ，则 $\angle 3 = \angle 4 = 2x$ ，如图所示，

$$\begin{aligned}
&\because \angle BAC = 72^\circ, \\
&\therefore \angle 2 + \angle 4 = 108^\circ, \text{ 即} \\
&x + 2x = 108^\circ, \\
&\therefore x = 36^\circ, \\
&\therefore \angle 3 = \angle 4 = 72^\circ, \\
&\therefore \angle DAC = 180^\circ - \angle 3 - \angle 4 = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ.
\end{aligned}$$



【标注】【知识点】三角形内角和的应用

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C$ ， D 在 BC 边上， $\angle BAD = 40^\circ$ ，在 AC 上取一点 E ，使 $\angle ADE = \angle AED$ ，则 $\angle EDC$ 的度数是（ ）。



- A. 15° B. 20° C. 25° D. 30°

【备注】 有一定的难度，需要设两个未知数求解，关键点是 $\angle ADC$ 为外角，再把 $\angle ADC$ 写成两个角的和

【答案】 B

【解析】 设 $\angle B = \angle C = \alpha$ ， $\angle ADE = \angle AED = \beta$ ，

$$\therefore \angle B + \angle BAD = \angle ADC,$$

$$\angle ADE + \angle EDC = \angle ADC,$$

$$\therefore \alpha + 40^\circ = \beta + \angle EDC,$$

$$\therefore \angle AED = \angle C + \angle EDC,$$

$$\therefore \beta = \alpha + \angle EDC,$$

$$\therefore \alpha + 40^\circ = \alpha + \angle EDC + \angle EDC,$$

$$\therefore \angle EDC = 20^\circ.$$

故选B.

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

三、 多边形

多边形

定义：在平面内，由一些_____首尾顺次相接组成的_____图形叫做多边形

n 边形：如果一个多边形由_____条线段组成，那么这个多边形就叫做 n 边形，如三角形，四边形，五边形等，_____是最简单的多边形

内角：多边形_____组成的角叫做它的内角

外角：多边形的边与它的_____组成的角叫做多边形的外角。

对角线：连接多边形_____的_____顶点的_____叫做多边形的对角线。

凸多边形：画出多边形的任何一条边所在的直线，如果整个多边形都在这条直线的_____，那么这样的多边形叫做凸多边形。

【备注】（1）多边形：在平面内，由一些**线段**首尾顺次相接组成的**封闭**图形叫做多边形；

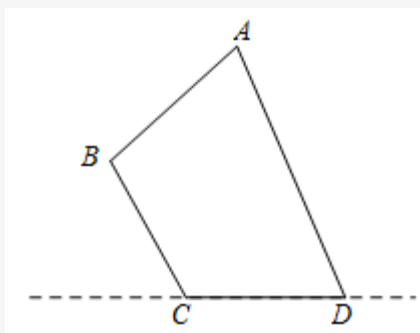
（2） n 边形：如果一个多边形由 **n** 条线段组成，那么这个多边形就叫做 **n** 边形，如三角形，四边形，五边形， $\dots$ ，**三角形**是最简单的多边形；

（3）内角：多边形**相邻两边**组成的角叫做它的内角；

（4）外角：多边形的边与它的**临边延长线**组成的角叫做多边形的外角。

（5）对角线：连接多边形**不相邻的两个顶点**的线段叫做多边形的对角线。

（6）凸多边形：画出多边形的任何一条边所在的直线，如果整个多边形都在这条直线的**同一侧**，那么这样的多边形叫做凸多边形。



【探究】

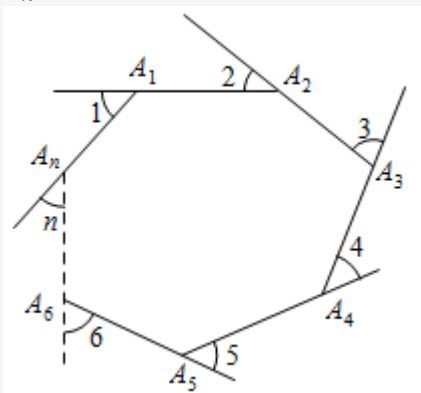
边数	从某一顶点出发的对角线数	总对角线条数	三角形数	内角和	外角和
4	1	2	2	180°	360°
5	2	5	3	360°	360°
6	3	9	4	540°	360°
...					
n	$(n-3)$	$\frac{n(n-3)}{2}$	$(n-2)$	$(n-2) \times 180^\circ$	360°

【备注】【总结】

- ① 从 n (n 为不小于3的整数) 边形的一个顶点可以引 $(n-3)$ 条对角线,
- ② n (n 为不小于3的整数) 边形共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线.
- ③ n (n 为不小于3的整数) 边形的内角和等于 $(n-2) \times 180^\circ$.
- ④ n (n 为不小于3的整数) 边形的外角和是 360° .

【推导过程】

如图已知 n 边形 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$, 求 n 边形的外角和.



分析: $\angle 1 = 180^\circ - \angle A_n A_1 A_2$;

$\angle 2 = 180^\circ - \angle A_1 A_2 A_3$;

$\angle 3 = 180^\circ - \angle A_2 A_3 A_4$;

...

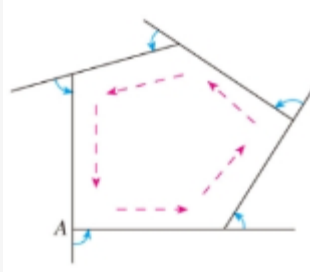
$\angle n = 180^\circ - \angle A_{n-1} A_n A_1$;

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \cdots + \angle n = n \times 180^\circ - (n-2) \times 180^\circ$;

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \cdots + \angle n = 360^\circ$.

【拓展思路】

多边形外角和理解: 如图, 从多边形的一个顶点 A 出发, 沿多边形的各边走过各顶点, 再回到点 A , 然后转向出发时的方向. 在行程中所转的各个角的和, 就是多边形的外角和. 由于走了一周, 所转的各个角等于一个周角, 所以多边形的外角和等于 360° .



🧠 举个 “ ” 栗子

栗子6

13. 如果一个多边形的内角和为 1260° ，那么这个多边形的一个顶点有 ____ 条对角线 .

【备注】 直接利用内角和公式求出边数，再考虑对角线相关公式
可以再拓展为总的对角线条数

【答案】 6

【解析】 解：设此多边形的边数为 x ，由题意得：

$$(x - 2) \times 180^\circ = 1260^\circ ,$$

解得 $x = 9$,

从这个多边形的一个顶点出发能画的对角线条数为 $9 - 3 = 6$.

故答案为：6 .

【标注】 【知识点】 多边形的内角和定理

14. 一个多边形的内角和比其外角和的2倍多 180° ，该多边形的边数是（ ） .

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【备注】 利用外角和，内角和的公式列方程计算
题目可以各种给出内角和与外角和的数量关系，带入计算即可

【答案】 D

【解析】 设多边形的边数是 n ，由题意得：

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ \times 2 + 180^\circ ,$$

解得 $n = 7$.

故选D .

【标注】 【知识点】 多边形内外角综合应用

栗子7

15. 一个多边形截去一个角后，形成新的多边形的内角和是 2520° ，则原多边形的边数为（ ）.

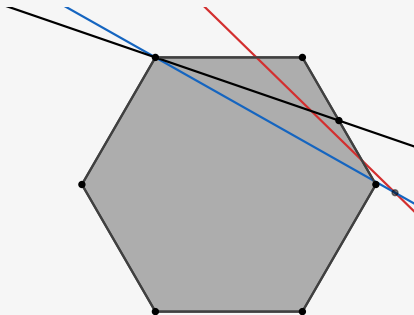
A. 15或16

B. 17或18

C. 15, 16或17

D. 17, 18或19

【备注】截取一个对边形的一个内角，可以构成几边形： $n-1$ 、 n 、 $n+1$ 边形。



【答案】C

【解析】设新多边形的边数是 n ，则 $(n-2) \cdot 180^\circ = 2520^\circ$ ，

解得 $n = 16$ ，

$\therefore$ 截去一个角后的多边形与原多边形的边数可以相等，多1或少1，

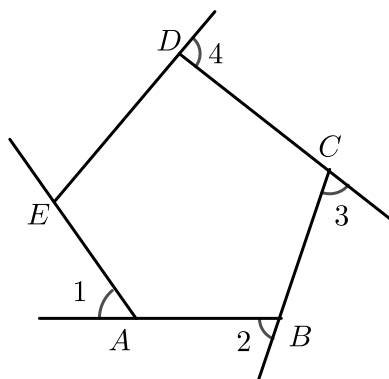
$\therefore$ 原多边形的边数是15, 16, 17，

故选C.

【标注】【知识点】正多边形边数

栗子8

16. 如图， $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ 是五边形 $ABCDE$ 的外角，且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 70^\circ$ ，则 $\angle AED$ 的度数是（ ）.

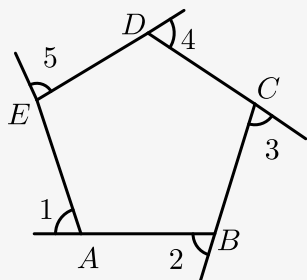


A. 110° B. 108° C. 105° D. 100°

【备注】这类题要结合已知图形，找到相关的 n 边形，再结合邻补角计算

【答案】D

【解析】设 $\angle AED$ 的外角为 $\angle 5$ ，



$\therefore$ 多边形外角和为 360° ，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 4 \times 70^\circ = 280^\circ$ ，

$\therefore \angle 5 = 360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle AED + \angle 5 = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle AED = 180^\circ - 80^\circ$ ，

$\angle AED = 100^\circ$ ，

故选D。

【标注】【知识点】多边形的外角和定理

正多边形

定义：在平面内，各个____都相等、各条____都相等的多边形叫做正多边形。

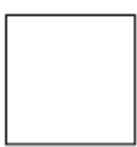
正多边形的内角度数：_____

正多边形的外角度数：_____

【备注】在平面内，各个角都相等、各条边都相等的多边形叫做正多边形。



正三角形



正方形



正五边形



正六边形

【易错点津】正多边形必须满足定义中的两个条件，缺一不可。如：各边都相等的多边形不一定是正多边形（如菱形）；各角都相等的多边形不一定是正多边形（如矩形）。

【拓展】

- ①正多边形的内角度数： $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.
- ②正多边形的外角度数： $\frac{360^\circ}{n}$.

🧠 举个 “ ” 栗子

栗子9

17. 若一个正 n 边形的每个内角都是 120° ，则这个正 n 边形的所有对角线的条数是（ ） .
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【备注】可直接带入内角公式求边长，但计算量较大
所以可以先求出每个外角，再利用 $\frac{360^\circ}{n}$ 求边数

【答案】D

【解析】由题意得 $(n-2) \cdot 180^\circ = 120^\circ n$ ，
解得 $n = 6$.

$\therefore$ 正 n 边形的所有对角线条数是 $\frac{6 \times (6-3)}{2} = 9$.

故选D .

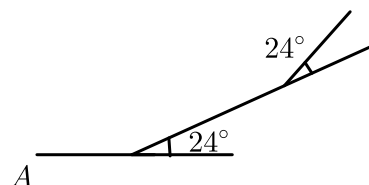
【标注】【知识点】多边形的内角和定理

【知识点】正多边形边数

【知识点】求多边形边或对角线的数量

栗子10

18. 如图所示，小华从A点出发，沿直线前进10米后左转 24° ，再沿直线前进10米，又向左转 24° ，...，照这样走下去，他第一次回到出发地A点时，一共走的路程是（ ） .



- A. 150米 B. 240米 C. 160米 D. 140米

【备注】正多边形与实际问题的结合，先求边数再计算总路程

【答案】A

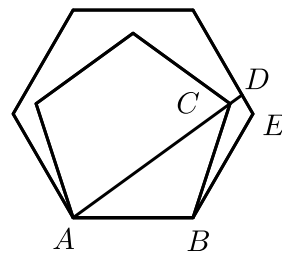
【解析】由多边形外角和为 360° 可得： $\frac{360^\circ}{24} = 15$.

从而所走路程： $15 \times 10 = 150\text{m}$.

【标注】【知识点】正多边形边数

栗子11

19. 有公共顶点 A 、 B 的正五边形和正六边形按如图所示位置摆放，连接 AC 交正六边形于点 D ，则 $\angle ADE$ 的度数为（ ） .



A. 144°

B. 84°

C. 74°

D. 54°

【备注】需要学生熟练掌握常见正多边形的内角度数，再结合所给几何图形进行计算

【答案】B

【解析】正五边形的内角是 $\angle ABC = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$

$\because AB = BC$,

$\angle CAB = 36^\circ$,

正六边形的内角是

$\angle ABE = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$

$\therefore \angle ADE + \angle E + \angle ABE + \angle CAB = 360^\circ$.

$\therefore \angle ADE = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ - 36^\circ = 84^\circ$,

故选：B .

【标注】【知识点】求正多边形的内角